

제 2 교시

수리 영역(가형)

짝수형

5지선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $2A+B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2. $\sin\theta = \frac{1}{3}$ 일 때, $\sin 2\theta$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [2점]

① $\frac{7\sqrt{2}}{18}$ ② $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 ④ $\frac{5\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{2}}{18}$

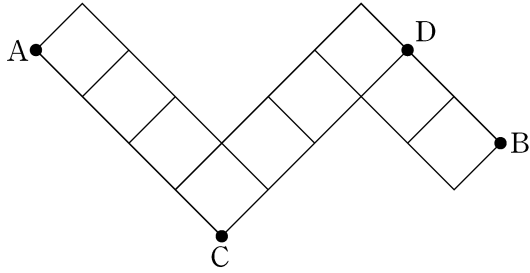
3. 좌표공간에서 두 점 $A(a, 1, 3)$, $B(a+6, 4, 12)$ 에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표가 $(5, 2, b)$ 이다. $a+b$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

4. 무리방정식 $x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = 8$ 의 모든 실근의 곱은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

5. 그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다.
이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 C 지점을 지나지 않고,
D 지점도 지나지 않으면서 B 지점까지 최단거리로 가는
경우의 수는? [3점]



- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

6. 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = a$ 위의 점 $(b, 1)$ 에서의 접선이 쌍곡선의
한 점근선과 수직이다. $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 양수이다.)
[3점]

- ① 68 ② 77 ③ 86 ④ 95 ⑤ 104

7. 화재가 발생한 화재실의 온도는 시간에 따라 변한다.
어떤 화재실의 초기 온도를 T_0 ($^{\circ}\text{C}$), 화재가 발생한 지
 t 분 후의 온도를 T ($^{\circ}\text{C}$)라고 할 때, 다음 식이 성립한다고
한다.

$$T = T_0 + k \log(8t + 1) \quad (\text{단, } k \text{는 상수이다.})$$

초기 온도가 20°C 인 이 화재실에서 화재가 발생한 지
 $\frac{9}{8}$ 분 후의 온도는 365°C 이었고, 화재가 발생한 지 a 분 후의
온도는 710°C 이었다. a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{99}{8}$ ② $\frac{109}{8}$ ③ $\frac{119}{8}$ ④ $\frac{129}{8}$ ⑤ $\frac{139}{8}$

8. 어느 학교 전체 학생의 60%는 버스로, 나머지 40%는 걸어서 등교하였다. 버스로 등교한 학생의 $\frac{1}{20}$ 이 지각하였고, 걸어서 등교한 학생의 $\frac{1}{15}$ 이 지각하였다. 이 학교 전체 학생 중 임의로 선택한 1명의 학생이 지각하였을 때, 이 학생이 버스로 등교하였을 확률은? [3점]

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{9}{20}$ ③ $\frac{9}{19}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{9}{17}$

9. 좌표평면에서 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 회전하는 회전변환을 f , 직선 $y=x$ 에 대한 대칭변환을 g 라 하자. 합성변환 $g^{-1} \circ f \circ g$ 에 의하여 직선 $x+2y+5=0$ 이 직선 $ax+by+5=0$ 으로 옮겨질 때, $a+2b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

10. A 지점에서 출발하여 거리가 6km 떨어진 B 지점까지 이동한 후 같은 길을 따라 A 지점으로 돌아오려고 한다. 처음 1km는 일정한 속력으로 걸다가 나머지 5km는 처음 걷는 속력의 2배의 속력으로 이동하고, 돌아올 때는 처음 걷는 속력보다 시속 2km 더 빠르게 이동하려고 한다. 왕복하는 데에 걸리는 총 시간이 2시간 30분 이하가 되도록 할 때, 처음 걷는 속력의 최솟값은? (단, 속력의 단위는 km/시이다.) [3점]

- ① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{14}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{16}{5}$

11. 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어,
꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르면 1개의 동전을 3번 던지고,
꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같으면 1개의 동전을 2번 던진다.
이 시행에서 동전의 앞면이 2번 나올 확률은? [3점]
- ① $\frac{11}{28}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{19}{56}$ ⑤ $\frac{9}{28}$

12. 연속함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = e^{x^2} + \int_0^1 tf(t) dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e+1}{2}$ ② $e-1$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $\frac{e-1}{2}$ ⑤ $e-2$

13. 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(X \geq 64) = P(X \leq 56)$

(나) $E(X^2) = 3616$

$P(X \leq 68)$ 의 값을 오른쪽 표를 이용하여 구한 것은? [3점]

- ① 0.9104 ② 0.9332
- ③ 0.9544 ④ 0.9772
- ⑤ 0.9938

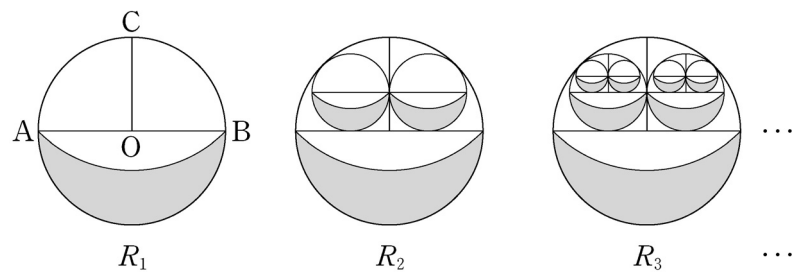
x	$P(m \leq X \leq x)$
$m + 1.5\sigma$	0.4332
$m + 2\sigma$	0.4772
$m + 2.5\sigma$	0.4938

14. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자. 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 \smile 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 \smile 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

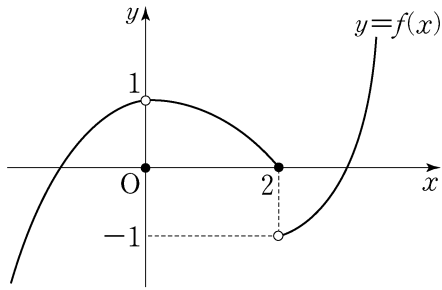
그림 R_2 에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 \smile 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$
- ④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고, 삼차함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고, $g(0)=3$ 이다. 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(3)$ 의 값은? [4점]



- ① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

16. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$2A^2 + AB = E, \quad AB + BA = 2A + E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1} = 2A + B$

ㄴ. $B = 2A + 2E$

ㄷ. $(B - E)^2 = O$ (단, O 는 영행렬이다.)

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=4$ 이고,

$$a_{n+1} = n \cdot 2^n + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k} \quad (n \geq 2)$$

이다. 따라서 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = \boxed{\text{(가)}} + \frac{a_n}{n}$$

이므로

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{n} + \boxed{\text{(가)}}$$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n}$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{\text{(가)}}}{n+1} \quad (n \geq 2)$$

이고, $b_2=3$ 이므로

$$b_n = \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 2)$$

이다. 그러므로

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ n \times \boxed{\text{(나)}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(4)+g(7)$ 의 값은? [4점]

- ① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

18. 자연수 n 에 대하여 포물선 $y^2 = \frac{x}{n}$ 의 초점 F를 지나는

직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

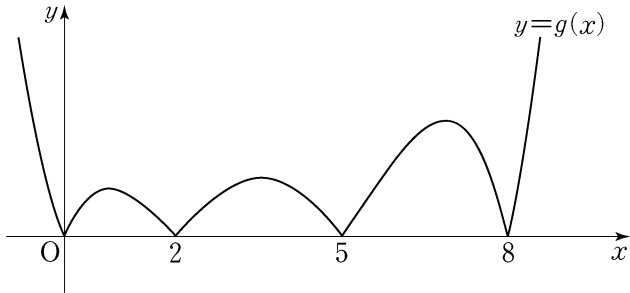
$\overline{PF}=1$ 이고 $\overline{FQ}=a_n$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$ 의 값은? [4점]

- ① 190 ② 195 ③ 200 ④ 205 ⑤ 210

19. 삼차함수 $f(x)$ 는 $f(0) > 0$ 을 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \left| \int_0^x f(t) dt \right|$$

라 할 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
 ㄴ. $f'(0) < 0$
 ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x) dx > 0$ 을 만족시키는 자연수 m 의 개수는 3이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 좌표공간에서 정사면체 ABCD의 한 면 ABC는 평면 $2x - y + z = 4$ 위에 있고, 꼭짓점 D는 평면 $x + y + z = 3$ 위에 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, 1, 3)$ 일 때, 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이는? [4점]

- ① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

21. 함수 $f(x) = kx^2e^{-x}$ ($k > 0$) 과 실수 t 에 대하여
 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와
 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하자.
 함수 $g(t)$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는
 k 의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ \sqrt{e} ⑤ e

단답형

22. 함수 $f(x) = x \ln x + 13x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.
 [3점]

23. 함수 $f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3} \sin x$ 의 최댓값은 a 이다.
 a^2 의 값을 구하시오. [3점]

24. 일차변환 $f: (x, y) \rightarrow (2x-y, x-2y)$ 를 나타내는 행렬을 A 라 하자. 행렬 A^4 으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 $(5, -1)$ 이 옮겨지는 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 표준편차 σ 가 알려진 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[100.4, 139.6]$ 이었다. 같은 표본을 이용하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간에 속하는 자연수의 개수를 구하시오. (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$, $P(0 \leq Z \leq 2.58) = 0.495$ 로 계산한다.) [3점]

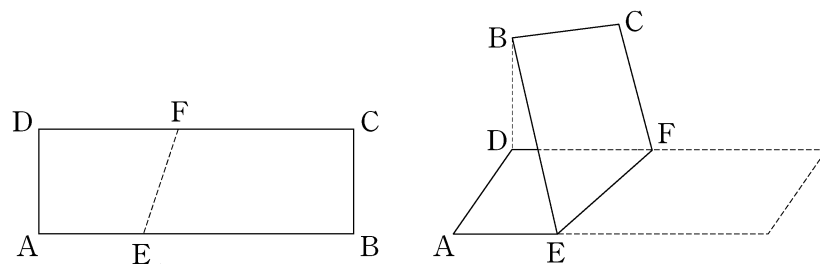
26. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 점 P 가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

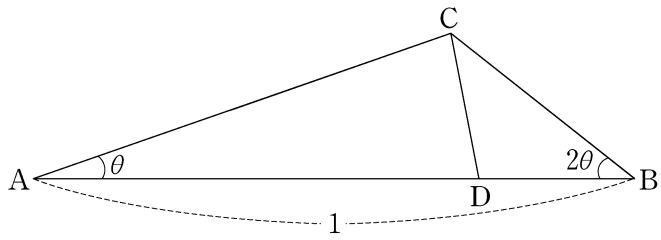
- (가) 세 점 P_1, P_2, P_3 의 좌표는 각각 $(-1, 0), (1, 0), (-1, 2)$ 이다.
 (나) 선분 P_nP_{n+1} 의 중점과 선분 $P_{n+2}P_{n+3}$ 의 중점은 같다.

예를 들어, 점 P_4 의 좌표는 $(1, -2)$ 이다. 점 P_{25} 의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=9, \overline{AD}=3$ 인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=3$ 일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ 이다. $60\cos\theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



29. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$ 이고 $\angle A=\theta$, $\angle B=2\theta$ 이다.
 변 AB 위의 점 D를 $\angle ACD=2\angle BCD$ 가 되도록 잡는다.
 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{CD}}{\theta} = a$ 일 때, $27a^2$ 의 값을 구하시오.
 (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이다.) [4점]



30. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 영역

$$\{(x, y) \mid 2^x - n \leq y \leq \log_2(x+n)\}$$

에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n 이라 하자.

- (가) x 좌표와 y 좌표는 서로 같다.
- (나) x 좌표와 y 좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1=2$, $a_2=4$ 이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.